Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele IX-XII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al II-lea

Problemă. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x]\cdot\{x\}=x\cdot|x|$.

Soluţie: Fie x o soluţie a ecuaţiei. Notăm $[x]=p, p\in\mathbb{Z}$ şi $\{x\}=t, t\in[0,1)$.

Dacă $x\geq 0\Rightarrow p\cdot t=(p+t)^2\Leftrightarrow p^2+pt+t^2=0\Leftrightarrow\left(p+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}=0\Leftrightarrow p=t=0\Leftrightarrow x=0.$

Dacă $x<0\Rightarrow p\cdot t=-(p+t)^2\Leftrightarrow p^2+3pt+t^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{t}{p}\right)^2+3\cdot\frac{t}{p}+1=0\Leftrightarrow t=p\cdot\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ sau $t=p\cdot\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Pentru $t=p\cdot\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow t>1-$ *fals*;

Pentru $t=p\cdot\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow p=\frac{2\cdot t}{-3+\sqrt{5}}, t\in(0,1)\Rightarrow p\in\left(\frac{2}{-3+\sqrt{5}},0\right)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow p\in\{-2,-1\}$.

Obţinem $x\in\left\{0,1-\sqrt{5},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Răspuns: $x\in\left\{0,1-\sqrt{5},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.